

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Análisis de Variable Real. Curso 11–12.
Primera prueba. 16 de Diciembre de 2011

- 1** i) Si $x \in \mathbb{R}$ probar que existe una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$.
ii) Probar que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ y $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

- 2** Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado.
i) Probar que existen sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(A)$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf(A)$.
ii) Si A es cerrado entonces $\sup(A), \inf(A) \in A$. ¿Es cierto el recíproco? Si lo es, demuéstralo; si no pon un contraejemplo.
iii) Probar que en cualquier caso $\sup(A), \inf(A)$ son puntos frontera de A .

- 3** En un espacio métrico (M, d) sea $C \subset M$ y no vacío. Dado $\varepsilon > 0$ definimos

$$U_{\varepsilon} = \{x \in M, \text{dist}(x, C) < \varepsilon\}$$

Probar que U_{ε} es abierto, que si $\varepsilon < \varepsilon'$ entonces $U_{\varepsilon} \subset U_{\varepsilon'}$ y que

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} U_{\varepsilon} = \bar{C}$$

- 4** i) En un espacio métrico (M, d) , demostrar que el conjunto formado por una sucesión convergente y su límite es compacto.

Indicación: Tomar un recubrimiento abierto de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{x_0\}$ y ...

- ii) Para la sucesión en $\mathbb{R}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $x_n = \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, construir un recubrimiento abierto de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ del que no se pueda extraer un subrecubrimiento finito.